Tema 1

Conjuntos

1. Describir por extensión los conjuntos formados por los siguientes elementos:

   a) Los números naturales impares menores de 11;

   b) Los números pares mayores que 10 y menores que 20;

   c) Los números primos menores de 15.

2. Di si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

   a) $6 \in \{2, 4, 5, 6, 9\}$;

   b) $y \in \{o, p, q, x\}$;

   c) $y \in \{o, p, q, y\}$

3. Describe por extensión los siguientes conjuntos:

   a) $A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, 15 < 3n < 30\}$;

   b) $B = \{n \in \mathbb{N} \,:\, 7 < n < 12 \text{ y } \exists a \text{ impar tal que } n = a + 5\}$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, finitos, infinitos?

   a) $A = \{\text{vocales de la palabra conjunto}\}$;

   b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$;

   c) $C = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n < 15\}$;

   d) $D = \{n \in \mathbb{N} \,:\, 5 < n < 5\}$;

   e) $E = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ es un número par}\}$;

   f) $F = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n > 15\}$;

   g) $G = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = |n|\}$.

5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$, todos ellos del conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Halla:

   a) $A \cup B$;

   b) $A \cup \overline{C}$;

   c) $\overline{B \cup C}$;

   d) $\overline{A \cap C}$;

   e) $A \cap B \cap C$;

   f) $A \cap B$.

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, finitos, infinitos?

   a) A = vocales de la palabra 'conjunto'

b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} : x < 15\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x < 5\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{N} : x$ es un número par$\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{N} : x > 15\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{N} : x = |x|\}$

7. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$, subconjuntos del conjunto total $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Halla:

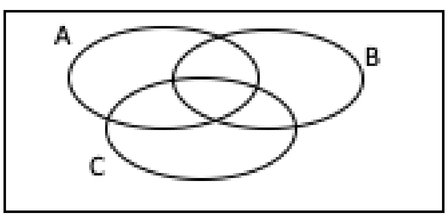
$$a)\, A \cup B, \quad b)\, A \cup \overline{C} \quad c)\, \overline{B \cup C} \quad d)\, \overline{A \cap C} \quad e)\, A \cap B \cap C \quad f)\, A \cap B.$$

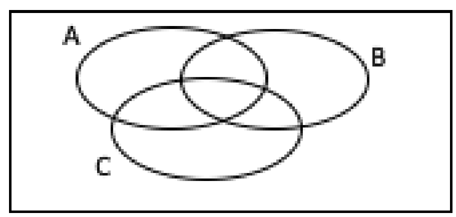
8. Dado el conjunto $A = \{6, 2, 8, 4\}$, encuentra todos los subconjuntos de A que se puedan construir con sus elementos.

9. ¿Cuál es la intersección de los conjuntos $\{e, x, i, t, o\}$ y $\{t, r, i, u, n, f, o\}$? ¿Y su unión?

10. Sombrea en los siguientes diagramas de Venn:

$$a)\, A \cap B \cap C, \quad b)\, (A \cap B) \cup (A \cap C)$$





11. Se consideran los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Calcula:

$$a)\, A \times (B \cup C) \quad b)\ (A \times B) \cup (A \times C) \quad c)\, A \times (B \cap C) \quad d)\ (A \times B) \cap (A \times C)\,.$$

12. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{3, 4\}$. Calcula $A \times B \times C$.

13. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, obtén el conjunto de las partes de A, $\mathcal{P}(A)$.

14. Se define $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, obtén $A \setminus B$ y $B \setminus A$.

15. Demuestra las leyes de De Morgan, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Relaciones, aplicaciones y relaciones de equivalencia

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, y la relación R de A en B definida por $aRb \iff a < b$, describe los pares de la relación.

2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación aRb si y sólo si $a^2 = b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 5, es decir $[5]$.

3. Dados los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 6, 7, 10\}$ y la relación de divisibilidad R de A en B,
$$aRb \iff a \text{ divide a } b \iff b \text{ es múltiplo de } a,$$
describe los pares de la relación.

4. Sea el conjunto $\mathcal{P}(S)$ de todos los subconjuntos de $S = \{a, b\}$, y la relación R definida en $\mathcal{P}(S)$ por ARB si y sólo si $|A \cap B| = 1$. Averiguar si es una relación reflexiva, simétrica y/o transitiva.

5. Estudiar si las relaciones en el conjunto $A = \{a, b, c\}$, dadas por las siguientes matrices M y N, son reflexivas, antisimétricas y transitivas, donde
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Dada la relación definida en $\mathbb{Z}$ por aRb si y sólo si $a - b = 5k$, con $k \in \mathbb{Z}$, estudiar si es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, y encontrar tres números enteros no relacionados entre sí.

7. Halla el dominio y la imagen (o rango) de cada una de las siguientes relaciones:
   a) $R = \{\{1, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 4\}, \{4, 6\}, \{3, 7\}, \{7, 6\}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
   b) S definida en $\mathbb{N}$ por xSy si y sólo si $2x + y = 16$;
   c) T definida en $\mathbb{N}$ por xTy si y sólo si $3x + y = 25$.

8. En $A = \{a, b, c, d\}$ se consideran las relaciones
   a) $R = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$;
   b) $S = \{\{d, c\}, \{c, b\}, \{a, b\}, \{d, d\}\}$;
   c) $T = \{\{a, a\}, \{b, a\}, \{c, a\}, \{d, d\}\}$;
   d) $R = \{\{b, a\}, \{a, c\}, \{d, d\}\}$.

   Averigua cuáles son aplicaciones y cuáles no.

9. Demuestra que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por
$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ -(n-1)/2 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$
es una aplicación, y determina si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

10. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación dada por

$$R = \{\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 1\}, \{3, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 2\}, \{4, 4\}, \{5, 1\}, \{5, 3\}, \{5, 5\}\},$$

obtén sus propiedades. ¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo, determina el conjunto cociente.

11. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, y la partición dada por $P = \{\{a, d, e\}, \{c, f\}, \{b\}\}$, define una relación de equivalencia, cuyo conjunto cociente coincida con P.

12. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación

$$(a, b)R(c, d) \text{ si y sólo si } a \cdot d = b \cdot c.$$

Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase $[(4, 8)]$.

13. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación

$$(a, b)R(c, d) \text{ si y sólo si } a + d = b + c.$$

Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo obtén la clase $[(2, 5)]$.

14. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x, y)R(z, t)$ si y sólo si $x \cdot y = z \cdot t$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

15. En $\mathbb{Z}$ se define la relación

$$xRy \text{ si y sólo si } x^2 - y^2 = x - y.$$

Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

16. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación

$$(x, y)R(z, t) \text{ si y sólo si } x + t = y + z.$$

Comprueba que es una relación de equivalencia y obtén el conjunto cociente.